

Estimation des statistiques d'erreur: analyse multivariée

UQAM Département des sciences de la terre et de l'atmosphère
Université du Québec à Montréal

Estimation des statistiques d'erreur

- Hollingsworth et Lönnberg (QJRMS, 1986)
- Estimés de $(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b)$ à différents endroits

- * Pour chaque site d'observation: $(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b)(p) = \varepsilon_o(p) + H\varepsilon_b(p)$
- * Des endroits différents correspondent à des mesures indépendantes

$$\langle \varepsilon_o(p)\varepsilon_o(q) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } p \neq q \\ \sigma_o^2 & \text{when } p = q \end{cases}$$

- * Covariances des vecteurs d'innovation:

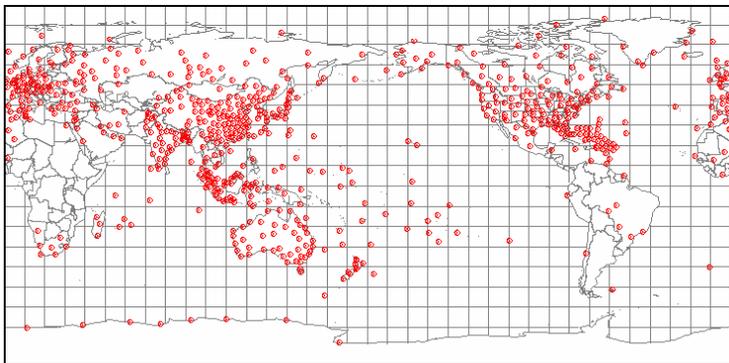
$$\begin{aligned} I(p, q) &= \langle (\varepsilon_o(p) + H\varepsilon_b(p))(\varepsilon_o(q) + H\varepsilon_b(q)) \rangle \\ &= \langle \varepsilon_o(p)\varepsilon_o(q) \rangle + \langle H\varepsilon_b(p)H\varepsilon_b(q) \rangle \end{aligned}$$

- * Si les observations correspondent aux variables du modèle:

$$\langle H\varepsilon_b(p)H\varepsilon_b(q) \rangle = \sigma_b(p)\sigma_b(q)\rho(|p - q|)$$

où ρ est la fonction de corrélation.

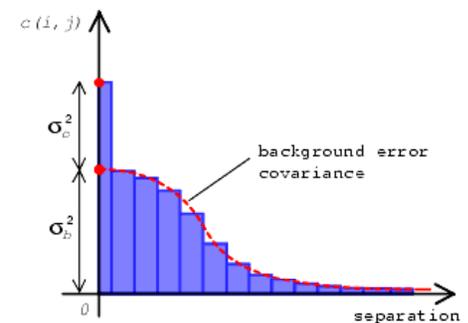
Réseau de radiosondages à 00 UTC and 12 UTC



Estimation des variances d'erreur et des corrélations

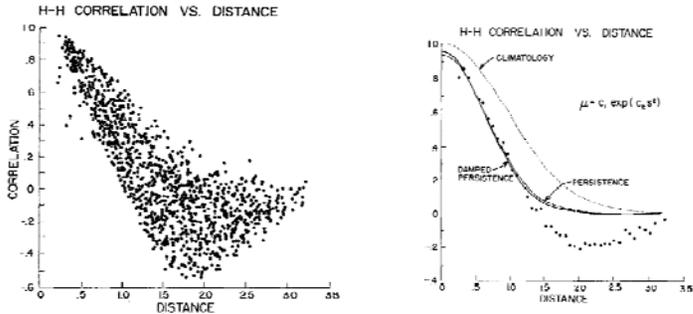
$$I(p, p) = \sigma_o^2 + \sigma_b^2$$

$$I(p, q) = \sigma_b^2\rho(r)$$



(tiré de Bouttier et Courtier, 2000, ECMWF)

Estimation de statistiques d'erreur de prévision (Schlatter, 1975)



Corrélation d'erreur de prévision en fonction de la distance (x1000 km).

Courbes de corrélations
Persistence:
 $\Phi(x, y, t) = \Phi_c + e^{-ct} (\Phi_0 - \Phi_c)$
Climatologie (Φ_c)

Analyse multivariée

- Etat-modèle correspond maintenant à (u, v, Φ) définis en chaque point de grille du modèle. Ici Φ représente le géopotentiel
- Exemple: couplage entre (u, v, Φ) aux latitudes moyennes introduit par l'équilibre géostrophique.
- But de l'analyse multivariée:
 - * construire un modèle de covariance d'erreur qui prend en compte les couplages dynamiques existant entre les variables du modèle.
- Ref.: Daley, 1991, ch. 5., sect. 5.2 et 5.3.

Couplage géostrophique

- Géopotential Φ est relié à la fonction de courant Ψ par:

$$\Phi = 2\Omega \sin \varphi \Psi = f \Psi$$

- Variance d'erreur du géopotential:

$$\sigma_{\Phi}^2 = f^2(\varphi) \sigma_{\Psi}^2$$

- Erreur s'annule à l'équateur, là où le couplage géostrophique cesse d'être valide
- Décomposition du géopotential en une composante géostrophique $f\Psi$ et une composante agéostrophique Φ' : $\Phi_{total} = f\Psi + \Phi'$

* Erreur sur Φ' est supposée être décorrélée de celle de Ψ : $\langle \Phi' \Psi \rangle = 0$

* Variance d'erreur:

$$\sigma_{\Phi}^2 = f^2(\varphi) \sigma_{\Psi}^2 + \sigma_{\Phi'}^2$$

Analyse des vents avec un incrément d'analyse purement rotationnel

Variable de contrôle: composantes horizontales du vent u et v

$$J_b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv J_b(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_b)^T \mathbf{B}_{u,v}^{-1} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_b)$$

Modèle de covariance d'erreur:
$$\mathbf{B}_{u,v} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}\mathbf{u}^T \rangle & \langle \mathbf{u}\mathbf{v}^T \rangle \\ \langle \mathbf{v}\mathbf{u}^T \rangle & \langle \mathbf{v}\mathbf{v}^T \rangle \end{pmatrix}$$

où u et v représentent l'erreur de prévision sur u et v (ε_u et ε_v).

- Théorème d'Helmholtz:

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x}$$

$$v = +\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

• Ecoulement rotationnel est représenté par sa fonction de courant Ψ .

- **Changement de variable $\Psi \rightarrow (u, v)$**

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{L} \Psi = \begin{pmatrix} -\partial / \partial y \\ \partial / \partial x \end{pmatrix} \Psi$$

Covariances d'erreur de prévision pour les vents

$$\mathbf{B}_{u,v} = \left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^T & v^T \end{pmatrix} \right\rangle = \langle (\mathbf{L} \Psi) (\mathbf{L} \Psi)^T \rangle = \mathbf{L} \langle \Psi \Psi^T \rangle \mathbf{L}^T$$

Covariance d'erreur de prévision pour Ψ avec corrélations homogènes et isotropes

$$\mathbf{B}_{\Psi\Psi} = \Sigma_{\Psi} S^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_{\Psi\Psi} (S^{-1})^T \Sigma_{\Psi}^T \Rightarrow \mathbf{B}_{u,v} = \mathbf{L} (\mathbf{B}_{\Psi\Psi} = \Sigma_{\Psi} S^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_{\Psi\Psi} (S^{-1})^T \Sigma_{\Psi}^T) \mathbf{L}^T$$

Terme de *background* de la fonction coût:

$$J_b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_b)^T \mathbf{B}_{u,v}^{-1} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_b) = \frac{1}{2} \xi^T \xi$$

Changement de variables prend la forme:

$$\mathbf{x}(\xi) = \begin{pmatrix} u(\xi) \\ v(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_b \\ v_b \end{pmatrix} + \mathbf{L} \Sigma_{\Psi} S^{-1} \tilde{\mathbf{C}}^{1/2} \xi$$

Remarques

- **Variances sont exprimées en termes des variables d'analyse, ici Ψ et Φ .**
- **Il est nécessaire d'établir une relation entre les variances d'erreur de Ψ et χ (cas général) et celles de u et v .**
- **Dérivation présentée au ch.5 de Daley (1991)**
 - * Dérivation pour le cas rotationnel seulement ($\chi = 0$) sera présentée.

Relation entre les covariances de Ψ et celles de u et v

- **Soit $u_1 = u(x_1, y_1)$, $u_2 = u(x_2, y_2)$, $v_1 = v(x_1, y_1)$ et $v_2 = v(x_2, y_2)$**
- **Propriété de la moyenne statistique:**

$$\begin{aligned} \langle u_1 u_2 \rangle &= \left\langle \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} \right\rangle = \left\langle \lim_{\Delta y_1 \rightarrow 0} \frac{(\Psi(x_1, y_1 + \Delta y_1) - \Psi(x_1, y_1))}{\Delta y_1} \frac{\partial \Psi(x_2, y_2)}{\partial y_2} \right\rangle \\ &= \lim_{\Delta y_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y_1} \left(\left\langle \Psi(x_1, y_1 + \Delta y_1) \frac{\partial \Psi(x_2, y_2)}{\partial y_2} \right\rangle - \left\langle \Psi(x_1, y_1) \frac{\partial \Psi(x_2, y_2)}{\partial y_2} \right\rangle \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y_1} \left\langle \Psi_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} \right\rangle \end{aligned}$$

- **Opérateur de dérivée commute avec la moyenne.**

Conséquent:

$$\langle u_1 u_2 \rangle = \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \langle \Psi_1 \Psi_2 \rangle$$

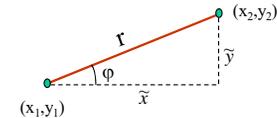
De même:

$$\langle u_1 v_2 \rangle = -\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial x_2} \langle \Psi_1 \Psi_2 \rangle \quad \langle u_2 v_1 \rangle = -\frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial x_1} \langle \Psi_1 \Psi_2 \rangle \quad \langle v_2 v_1 \rangle = +\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} \langle \Psi_1 \Psi_2 \rangle$$

- **Changement de variables:**

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow (x_1, y_1, \tilde{x}, \tilde{y})$$

$$\text{où } \begin{aligned} y_2 - y_1 &= \tilde{y} \\ x_2 - x_1 &= \tilde{x} \end{aligned}$$



- **Règle de dérivation en chaîne:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1} &= \frac{\partial y_1}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} &= + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \end{aligned}$$

- **Covariances de Ψ sont supposées être homogènes et isotropes:**

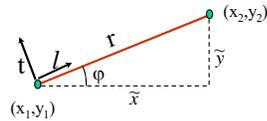
* Homogénéité: $\langle \Psi_1 \Psi_2 \rangle = \langle \Psi(x_1, y_1) \Psi(x_2, y_2) \rangle = B_{\Psi\Psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$

* Isotropie: $B_{\Psi\Psi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = B_{\Psi\Psi}(r)$

- **Donc $\langle u_1 u_2 \rangle = \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \langle \Psi_1 \Psi_2 \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right) B_{\Psi\Psi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} B_{\Psi\Psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$**

• On peut également montrer que:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = -\frac{\partial^2 B_{\Psi\Psi}}{\partial \tilde{x}^2} \quad ; \quad \langle u_1, v_2 \rangle = \langle v_2, u_1 \rangle = \frac{\partial^2 B_{\Psi\Psi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}}$$



En passant en coordonnées polaires (r,θ)

$$B_{uu} + B_{vv} = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle = -\left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}\right) B_{\Psi\Psi} = -\nabla^2 B_{\Psi\Psi}(r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} B_{\Psi\Psi}(r) \right)$$

$$B_{uv} = \sin \phi \cos \phi \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} B_{\Psi\Psi}(r) \right) \right]$$

$$B_{vu} = B_{uv}$$

$$B_{vv} - B_{uu} = \langle v, v \rangle - \langle u, u \rangle = \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \right) B_{\Psi\Psi}(r)$$

$$= (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} B_{\Psi\Psi}(r) \right) \right]$$

Rotation des composantes pour les aligner avec les directions longitudinales et transverses

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} B_{ll} & B_{lt} \\ B_{tl} & B_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{uu} & B_{uv} \\ B_{vu} & B_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que

$$B_{ll}(r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} B_{\Psi\Psi}(r) \quad B_{tt}(r) = -\frac{d^2}{dr^2} B_{\Psi\Psi}(r)$$

$$B_{ll} = B_{tt} = 0$$

Généralisation pour inclure le potentiel des vitesses χ (composante divergente)

$$B_{ll}(r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} B_{\Psi\Psi}(r) - \frac{d^2}{dr^2} B_{\chi\chi} \quad B_{tt}(r) = -\frac{d^2}{dr^2} B_{\Psi\Psi} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} B_{\chi\chi}$$

Relation entre les covariances d'erreur sur les vents et celles de Ψ et χ

$$\begin{pmatrix} B_{uu} & B_{uv} \\ B_{vu} & B_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{ll} & 0 \\ 0 & B_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$B_{uu} = \sin^2 \phi B_{ll} + \cos^2 \phi B_{tt}$$

$$B_{vv} = \cos^2 \phi B_{ll} + \sin^2 \phi B_{tt}$$

$$B_{uv} + B_{vu} = B_{ll} + B_{tt} = -\nabla^2 B_{\Psi\Psi} - \nabla^2 B_{\chi\chi}$$

Définissons les corrélations $\rho_{\Psi}(r)$ et $\rho_{\chi}(r)$ alors que σ_{Ψ}^2 et σ_{χ}^2 sont les variances correspondantes:

$$B_{\Psi\Psi} = \sigma_{\Psi}^2 \rho_{\Psi}(r)$$

$$B_{\chi\chi} = \sigma_{\chi}^2 \rho_{\chi}(r)$$

Longueur caractéristique d'une fonction de corrélation

•Définie comme étant la courbure locale

•Exemple: gaussienne

*Cas 1D

$$\rho(r) = \rho(0) + r \frac{d\rho}{dr}(0) + \frac{r^2}{2} \frac{d^2\rho}{dr^2}(0) + \dots$$

$$\cong 1 - \frac{r^2}{L_c^2}$$

$$L_c^2 = -\frac{2}{\rho''(0)}$$

*Cas 2D

$$L_c^2 = -\frac{2}{\nabla^2 \rho(0)}$$

$$\rho(r) = e^{-r^2/2L^2}$$

$$\nabla^2 \rho(r) = \frac{d^2}{dr^2} \rho + \frac{1}{r} \frac{d\rho}{dr}$$

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{r}{L^2} e^{-r^2/2L^2}$$

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} = -\frac{1}{L^2} e^{-r^2/2L^2} + \frac{r^2}{L^4} e^{-r^2/2L^2}$$

$$\nabla^2 \rho(0) = -\frac{1}{L^2} - \frac{1}{L^2} = -\frac{2}{L^2}$$

$$\therefore L = L_c$$

Variances d'erreur sur les vents

• Variances, covariances et corrélations de Ψ et χ

$$B_{\Psi\Psi} = \sigma_{\Psi}^2 \rho_{\Psi}(r)$$

$$B_{\chi\chi} = \sigma_{\chi}^2 \rho_{\chi}(r)$$

On suppose que les variances sont localement constantes (i.e., elles varient sur des échelles spatiales plus longues que celle de la fonction de corrélation).

• Variances d'erreur des vents:

$$\mathbf{B}_{uu}(0) = \mathbf{B}_{vv}(0) = \sigma_u^2$$

$$B_{uu}(0) + B_{vv}(0) = 2\sigma_u^2$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \left(-\nabla^2 B_{\Psi\Psi} - \nabla^2 B_{\chi\chi} \right)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \left(-\sigma_{\Psi}^2 \nabla^2 \rho_{\Psi}(r) - \sigma_{\chi}^2 \nabla^2 \rho_{\chi}(r) \right)$$

$$= \frac{2\sigma_{\Psi}^2}{L_{\Psi}^2} + \frac{2\sigma_{\chi}^2}{L_{\chi}^2}$$

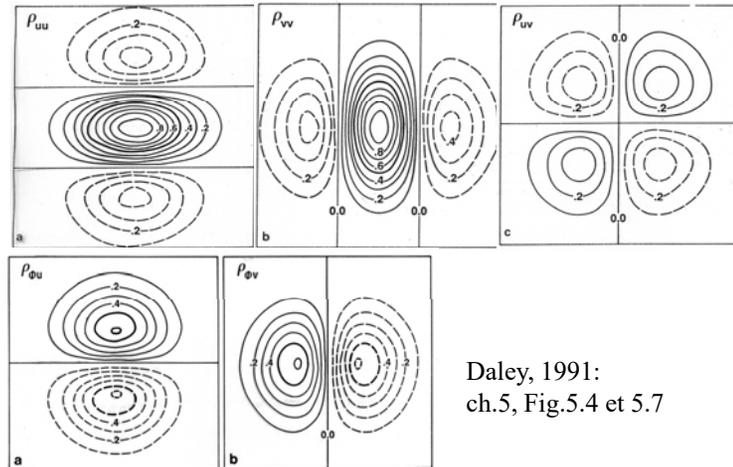
Décomposition de la variance en composantes rotationnelle et divergente

- **Composante rotationnelle:** $\frac{\sigma_{\Psi}^2}{L_{\Psi}^2} = (1 - v^2)\sigma_U^2$
- **Composante divergente:** $\frac{\sigma_{\chi}^2}{L_{\chi}^2} = v^2\sigma_U^2$
- **Rapport entre la composante divergente de l'énergie cinétique et l'énergie cinétique totale de l'erreur** $v^2 = \frac{\sigma_{\chi}^2 / L_{\chi}^2}{\sigma_U^2}$

- **Covariances d'erreur sur les vents:**

$$B_{uu} = \sigma_{\Psi}^2 \left[-\sin^2 \phi \frac{d^2 \rho_{\Psi}}{dr^2} - \cos^2 \phi \frac{1}{r} \frac{d\rho_{\Psi}}{dr} \right] + \sigma_{\chi}^2 \left[-\cos^2 \phi \frac{d^2 \rho_{\chi}}{dr^2} - \sin^2 \phi \frac{1}{r} \frac{d\rho_{\chi}}{dr} \right]$$

Corrélations croisées $\langle uu \rangle \langle vv \rangle \langle uv \rangle \langle \Phi u \rangle$ et $\langle \Phi v \rangle$



Daley, 1991: ch.5, Fig.5.4 et 5.7

Figure 5.7 (a) $\rho_{uu}(r, \phi)$ and (b) $\rho_{vv}(r, \phi)$ for $\mu = 1$, using the correlation model (4.3.21).

Covariances d'erreur entre la masse (géopotentiell) et les vents

- **Couplage géostrophique complet: $\Phi = f_0 \Psi$**
 - * Composante rotationnelle de la variance d'erreur des vents est directement reliée à celle du géopotentiell $\sigma_{\Phi}^2 = f_0^2 \sigma_{\Psi}^2$
- **Couplage géostrophique partiel: $\Phi = f_0 \Psi + \Phi'$**
 - * $\langle \Psi \Phi' \rangle = 0 \implies \mu^2 = \sigma_{\Phi'}^2 / \sigma_{\Phi}^2$
 - * $\sigma_{\Phi}^2 (1 - \mu^2) = f_0^2 \sigma_{\Psi}^2$
- **Définition des variables d'analyse:** Ψ, χ et Φ' : $\langle \Psi \Phi' \rangle = \langle \chi \Phi' \rangle = \langle \Psi \chi \rangle = 0$

$$B_{\Psi\chi\Phi'} = \begin{pmatrix} \langle \Psi \Psi^T \rangle & \langle \Psi \chi^T \rangle & \langle \Psi \Phi'^T \rangle \\ \langle \chi \Psi^T \rangle & \langle \chi \chi^T \rangle & \langle \chi \Phi'^T \rangle \\ \langle \Phi' \Psi^T \rangle & \langle \Phi' \chi^T \rangle & \langle \Phi' \Phi'^T \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \Psi \Psi^T \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \chi \chi^T \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \Phi' \Phi'^T \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{\Psi\Psi} & 0 & 0 \\ 0 & B_{\chi\chi} & 0 \\ 0 & 0 & B_{\Phi'\Phi'} \end{pmatrix}$$

Modèle de covariance d'erreur multivarié

- **Définition de deux changements de variables supplémentaires**

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \chi \\ \Phi' \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1} \begin{pmatrix} \Psi \\ \chi \\ \Phi = \Phi' + f_0 \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ f_0 \mathbf{I} & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \chi \\ \Phi' \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2} \begin{pmatrix} u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ v = +\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \\ \Phi \end{pmatrix}$$

- **Expression pour les covariances d'erreur de u, v and Φ sont exprimées en termes de celles de Ψ, χ et Φ'**

$$B_{u,v,\Phi} = L_2 L_1 B_{\Psi,\chi,\Phi'} L_1^T L_2^T$$

$$B_{\Psi,\chi,\Phi} = L_1 B_{\Psi,\chi,\Phi'} L_1^T = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ f_0 \mathbf{I} & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{\Psi\Psi} & 0 & 0 \\ 0 & B_{\chi\chi} & 0 \\ 0 & 0 & B_{\Phi'\Phi'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & f_0 \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{\Psi\Psi} & 0 & 0 \\ 0 & B_{\chi\chi} & 0 \\ f_0 B_{\Psi\Psi} & 0 & B_{\Phi'\Phi'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & f_0 \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{\Psi\Psi} & 0 & B_{\Psi\Psi} f_0 \\ 0 & B_{\chi\chi} & 0 \\ f_0 B_{\Psi\Psi} & 0 & [f_0 B_{\Psi\Psi} f_0 + B_{\Phi'\Phi'}] \end{pmatrix}$$

Incréments d'analyse et covariances d'erreur de prévision

- Incréments d'analyse obtenus en réponse à une seule observation de u située sur un point de grille

$$\mathbf{X}_a - \mathbf{X}_b = \Delta \mathbf{X}_a = \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta \Phi \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{u,v,\Phi} \mathbf{H}^T \frac{(u_{obs} - u_b)}{(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)} = \lambda \mathbf{B}_{u,v,\Phi} \mathbf{H}^T$$

- Expression de l'incrément d'analyse:

* Observation de u au point x_1 :

$$\rightarrow \Delta u = \mathbf{B}_{uu}(x_1, x_2)$$

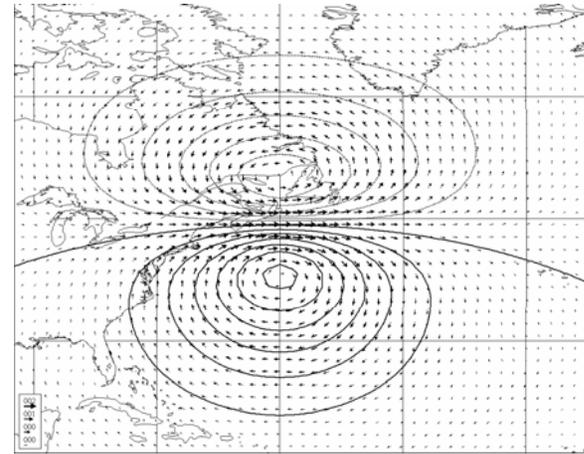
$$\rightarrow \Delta v = \mathbf{B}_{vu}(x_1, x_2)$$

$$\rightarrow \Delta \Phi = \mathbf{B}_{\Phi u}(x_1, x_2)$$

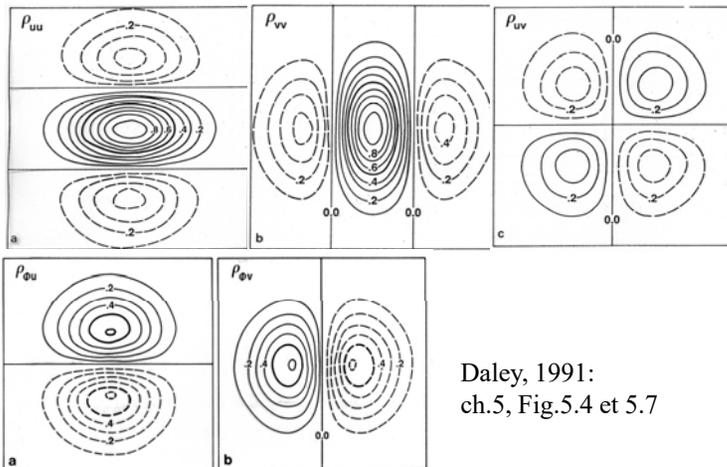
$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{uu} & \mathbf{B}_{uv} & \mathbf{B}_{u\Phi} \\ \mathbf{B}_{vu} & \mathbf{B}_{vv} & \mathbf{B}_{v\Phi} \\ \mathbf{B}_{\Phi u} & \mathbf{B}_{\Phi v} & \mathbf{B}_{\Phi\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Minimisation conduit à des incréments d'analyse Δx desquels on peut obtenir les incréments Δu , Δv et $\Delta \Phi$ en appliquant les changements de variables décrits plus haut.

Incrément d'analyse obtenu en réponse à une observation unique de la composante zonale du vent



Corrélations croisées $\langle uu \rangle$ $\langle vv \rangle$ $\langle uv \rangle$ $\langle \Phi u \rangle$ et $\langle \Phi v \rangle$



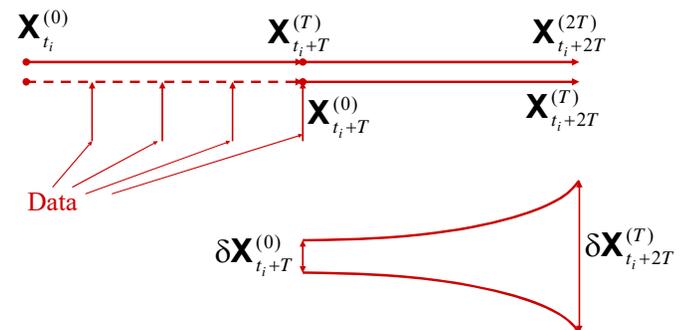
Daley, 1991: ch.5, Fig.5.4 et 5.7

Figure 5.7 (a) $\rho_{uu}(r, \phi)$ and (b) $\rho_{vv}(r, \phi)$ for $\mu = 1$, using the correlation model (4.3.21).

Méthodes des prévisions décalées

(ou méthode NMC, Parrish et Derber, 1992)

- Différence entre deux prévisions est supposée être représentative de l'erreur de prévision



Procédure pour estimer les statistiques d'erreur de prévision

1. Calcul des différence $X_{48}^{(k)} - X_{24}^{(k)} = E^{(k)}$
2. Calcul de la moyenne de E et débiaisage des $E^{(k)}$

$$\bar{E} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E^{(k)} \quad \hat{E}^{(k)} = E^{(k)} - \bar{E} \quad \hat{E}^{(k)} = \begin{pmatrix} \Delta u^{(k)} \\ \Delta v^{(k)} \\ \Delta \Phi^{(k)} \\ \Delta p_s^{(k)} \end{pmatrix}$$

3. Conversion des (u,v) en (Ψ, χ)
4. Régression linéaire pour obtenir $E(\varphi, \eta)$, S et $A(\eta, \eta_2)$
5. Définition des variables d'analyse ψ' , χ' , T' et p_s'

Modèle de covariance d'erreur multivarié

- Décomposition des variables du modèle en composantes *balancées* et non-balancées

- * Fonction de courant: Ψ
- * Potentiel des vitesses: $\chi = \chi' + E(\varphi, \eta) \Psi$
- * Température: $T(\varphi, \eta) = T' + A(\eta, \eta_2) B(\varphi) \Psi(\varphi, \eta_2)$
- * Pression de surface: $p_s = \ln p_s' + S \Psi(\varphi, \eta_2)$

- $E(\varphi, \eta)$, $A(\eta, \eta_2)$ et S sont obtenus par régression linéaire pour minimiser la variance des composantes non-balancées
- * (Derber et Bouttier, 1999; Gauthier *et al.*, 1998)

Définition implicite des covariances

- Changement de variable:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Psi \\ \chi \\ T \\ \ln q \\ \ln p_s \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \Psi \\ \chi' \\ T' \\ \ln q \\ \ln p_s' \end{pmatrix} \equiv \mathbf{M} \mathbf{x}'$$

- Erreurs sur les variables d'analyse sont supposées être décorréliées :

$$\langle \Psi \chi' \rangle = \langle \Psi T' \rangle = \langle T' \chi' \rangle = \dots = 0$$

- Les covariances d'erreur pour les variables du modèle sont définies par ce changement de variable

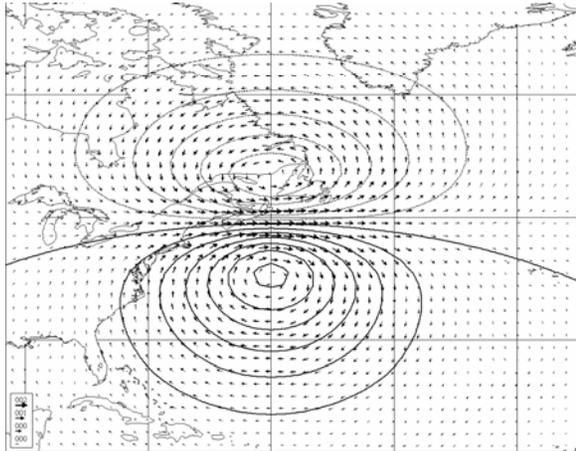
Définition implicite des covariances

$$\mathbf{B}_{x'} = \begin{pmatrix} \langle \Psi \Psi^T \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle \chi' \chi'^T \rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \langle T' T'^T \rangle & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \langle (p_s', p_s'^T) \rangle \end{pmatrix}$$

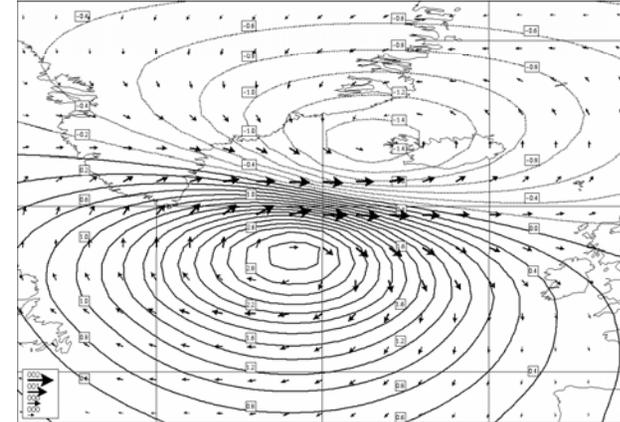
$$\mathbf{B}_x = \mathbf{M} \mathbf{B}_{x'} \mathbf{M}^T$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \Psi \Psi^T \rangle & \langle \Psi \Psi^T \rangle E^T & \langle \Psi \Psi^T \rangle A^T & \langle \Psi \Psi^T \rangle S^T \\ E \langle \Psi \Psi^T \rangle & \boxed{E \langle \Psi \Psi^T \rangle E^T + \langle \chi' \chi'^T \rangle} & E \langle \Psi \Psi^T \rangle A^T & E \langle \Psi \Psi^T \rangle S^T \\ A \langle \Psi \Psi^T \rangle & A \langle \Psi \Psi^T \rangle E^T & (A \langle \Psi \Psi^T \rangle A^T + \langle T' T'^T \rangle) & A \langle \Psi \Psi^T \rangle S^T \\ S \langle \Psi \Psi^T \rangle & S \langle \Psi \Psi^T \rangle E^T & S \langle \Psi \Psi^T \rangle A^T & (S \langle \Psi \Psi^T \rangle S^T + \langle p_s', p_s'^T \rangle) \end{pmatrix}$$

Incrément d'analyse obtenu en réponse à une seule observation de la composante zonale du vent



Incréments de géopotentiel et de vents obtenus en réponse à une seule observation de la composante zonale du vent située près de la surface dans les extra-Tropiques Nord (60N-30W)

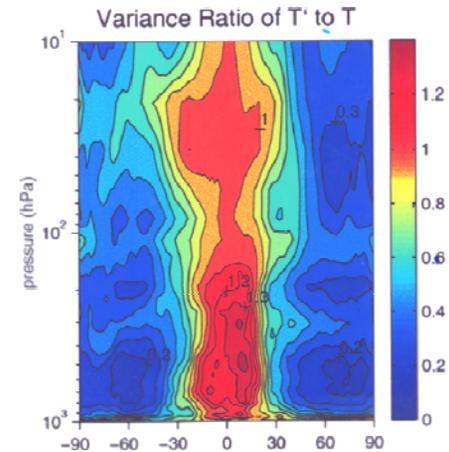


Estimation et définition des statistiques d'erreur de prévision

• **Statistiques d'erreur de prévision sont basées sur celles des innovations pour des observations de radiosondage de u, v et Φ**

- * Variances d'erreur de u, v et Φ peuvent ainsi être obtenues (σ_u^2 , σ_v^2 et σ_Φ^2) des innovation par rapport aux données de radiosondages
- * Estimation des longueurs de corrélations de Ψ , χ' et Φ'
- * Calcul de v^2
- * Calcul de σ_Ψ^2 , σ_χ^2 et σ_Φ^2 .

Rapport de la composante non-balancée de la variance sur la variance totale (Buehner et al., 1999)



Formulation incrémentale de l'initialisation aux modes normaux (Daley, 1991, ch.10)

- Analyse initialisée:

$$\mathbf{x}_I = \mathbf{N}(\mathbf{x}_a) \equiv \mathbf{N}(\mathbf{x}_b + \delta\mathbf{x}_a)$$

où \mathbf{N} représente le processus d'initialisation aux modes normaux

- Puri et al.(1982), Ballish et al. (1992):

* initialisation n'est appliquée qu'aux incréments d'analyse pour ne pas filtrer des ondes de gravité réelles (e.g., marées atmosphériques, ondes semi-diurnes)

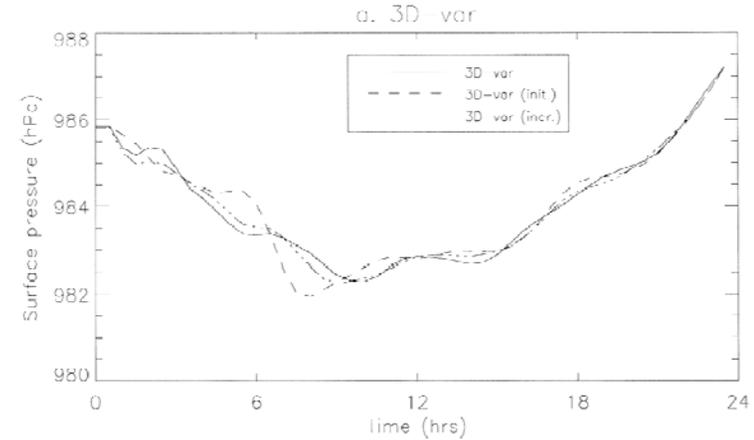
$$\delta\mathbf{x}_I = \mathbf{N}(\mathbf{x}_a) - \mathbf{N}(\mathbf{x}_b) \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_b} \delta\mathbf{x}_a$$

- Analyse initialisée:

$$\mathbf{x}_I = \mathbf{x}_b + \delta\mathbf{x}_I$$

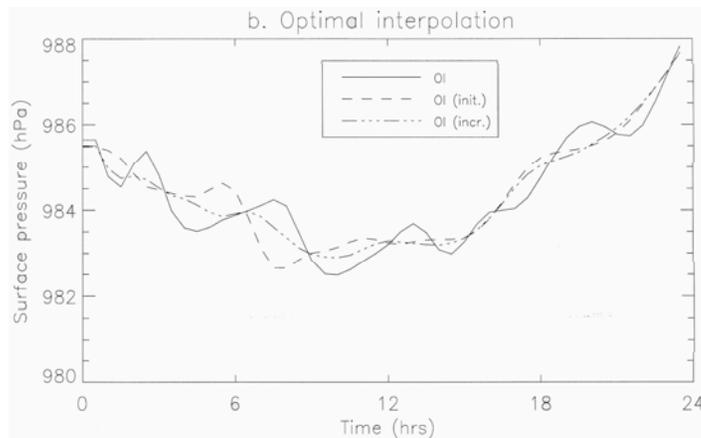
3D-Var

séries temporelles de pression de surface



Interpolation optimale

séries temporelles de pression de surface



Composante d'analyse du filtre de Kalman

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{P}_a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{B}$$

Matrice de gain (ou poids statistiques): \mathbf{K}
 Innovations (ou écarts aux observations): $\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b$

- Filtre de Kalman ajoute une dimension temporelle à la modélisation des covariances d'erreur de prévision qui peuvent alors dépendre de l'écoulement
- 4D-Var ajoute une dimension temporelle aux opérateurs d'observation
- 4D-Var peut être perçu comme une généralisation de l'opérateur d'observation qui inclut maintenant une intégration du modèle de prévision